JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series A 31, 270–276 (1981)

Classification d'une famille d'ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$ de $PG(d, q)$

CHRISTIANE LEFEVRE–PERCSY

Université Libre de Bruxelles, Boulevard du Triomphe, B-1050 Bruxelles, Belgique

Communicated by F. Buekenhout

Received November 27, 1980

This paper classifies sets of class $(0, 1, n, q+1)$ in $PG(d, q)$ with $3 \leqslant n \leqslant q-1$, whose intersection with some plane is the complement of a maximal arc.

1. INTRODUCTION

Les ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$ d'un espace projectif $PG(d, q)$ d'ordre q ont été étudiés dans [4, 5] pour les valeurs $n=2$ et $n=q$, respectivement. Dans [6], nous avons abordé l'étude de tels ensembles pour $3 \leqslant n \leqslant q-1$. Nous y montrons que, selon la nature de leurs sections planes, ils se répartissent en deux familles distinctes. Nous classons ici l'une de ces deux familles: celle des ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$ de $PG(d, q)$, dont l'intersection avec un plan de l'espace est le complément d'un arc maximal. Nous retrouvons, en particulier, un résultat de M. Tallini–Scafati [7].

2. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Soit $P = PG(d, q)$ l'espace projectif de dimension d et ordre $q = p^h$. Nous désignons par $\langle X \rangle$ la variété linéaire de P engendrée par un ensemble X de points de P.

Soit Q un ensemble de points de P. L'ensemble Q est dit *de classe* $(0, 1, n, q+1)$ si toute droite de P rencontre Q en 0, 1, n ou $q+1$ points. Un tel ensemble est de classe $(0, 1, n, q+1)$ *dans* P si $\langle Q \rangle = P$. Si toute droite rencontre Q en au moins un point, alors Q est dit *de classe* $(1, n, q+1)$. Remarquons que si $q=2$, tout sous-ensemble de P est de classe $(0, 1, n, q+1)$. Nous supposerons donc toujours $q > 2$. Nous supposerons

0097-3165/81/060270–07$02.00/0

également qu'*il existe une droite rencontrant Q en n points*, les ensembles de classe $(0, 1, q + 1)$ étant les variétés linéaires de P.

Deux points distincts a, b de Q sont *adjacents* si la droite ab est contenue dans Q; nous écrivons $a \sim b$ et nous convenons que tout point de Q est adjacent à lui-même. Si a n'est pas adjacent à b, nous écrivons $a \not\sim b$. Le *voisinage* Q_a d'un point a est l'ensemble des points de Q adjacents à a. Un point a de Q est *point double* de Q si a est adjacent à tout point de Q, c'est-à-dire si $Q_a = Q$. Si Q possède un point double, Q est dit *dégénéré*. Une droite *tangente* à Q est une droite de P qui rencontre Q en un seul point ou y est incluse, une *vraie tangente* à Q est une droite rencontrant Q en un seul point, une *sécante* à Q est une droite non contenue dans Q qui rencontre Q en plus d'un point, une *droite extérieure* à Q est une droite ne rencontrant pas Q.

Les ensembles de classe $(0, 1, n, q + 1)$ de $PG(2, q)$ qui contiennent une droite sont nécessairement de classe $(1, n, q + 1)$. Ils sont classés par M. Tallini–Scafati [7].

LEMME 1. *Si K est un sensemble de classe $(1, n, q + 1)$ de $PG(2, q)$ qui contient une droite de $PG(2, q)$ alors K est l'un des suivants*:

(i) *le plan $PG(2, q)$*;

(ii) *un faisceau de n droites concourrantes*;

(iii) *la réunion d'un $\{(n - 1)(q + 1) + 1, n - 1\}$-arc K' (K' est un arc maximal) et d'une droite extérieure à K'*;

(iv) *le complément d'un $\{(q - n)(q + 1) + 1, q - n + 1\}$-arc (ce dernier est également un arc maximal)*.

La détermination de tels ensembles se ramène donc à celle d'arcs maximaux du plan. Or un arc maximal n'existe que si le cardinal de son intersection avec une droite sécante divise l'ordre du plan. Dès lors, un ensemble de type (iii) n'existe que si $n - 1$ divise q. Par conséquent, si $q = p^h$, on a:

$$n = p^l + 1 \qquad \text{avec} \quad 0 < l < h. \tag{1}$$

De même, un ensemble de type (iv) n'existe que si $q - n + 1$ divise q. Par conséquent, si $q = p^h$, on a $q - n + 1 = p^{l'}$, avec $0 < l' < h$, s'est-à-dire:

$$n = p^{l'}(p^{h-l'} - 1) + 1 \qquad \text{avec} \quad 0 < l' < h. \tag{2}$$

Mentionnons enfin que le cardinal d'un ensemble de type (iii) vaut $nq - q + n$, celui d'un ensemble de type (iv), $nq + n$ et qu'un ensemble de type (iv) ne possède aucune vraie tangente.

2. Résultat principal

Dans cette section, nous déterminons les ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$ de P qui contiennent un ensemble plan de type (iv) mais aucun ensemble de type (iii).

Lemme 2. *Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P = PG(3, q)$, avec $3 \leqslant n \leqslant q-1$, rencontré par un plan suivant le complément K d'un arc maximal. Alors Q possède une vraie tangente.*

Démonstration. Supposons que Q ne possède pas de vraie tangente. Dans ce cas, par le Théorème 1, toute section plane de Q contenant une droite est soit un plan, soit le complément d'un arc maximal. (Les ensembles de type (iii) sont exclus, car ceux-ci possèdent une vraie tangente). De plus, toute section plane de Q doit contenir une droite de $P = PG(3, q)$: en effet, si Q était rencontré par un plan suivant un arc K', cet arc K' serait nécessairement maximal (K' ne peut posséder de tangente) et donc n divise $q = p^h$, ce qui contredit (2). Calculons de deux manières différentes le cardinal de Q.

(a) Soient A une sécante à Q et α_i les plans de P par A. Par ce qui précède, $\alpha_i \cap Q$ est le complément d'un arc maximal et donc $|Q| = n + (q+1)(nq + n - n)$, c'est-à-dire

$$|Q| = n(q^2 + q + 1). \tag{3}$$

(b) Soit A' une droite contenue dans Q et α'_i les plans de $P_3(q)$ par A'. Désignons par λ le nombre de plans α'_i contenus dans Q et par μ le nombre de plan α'_i rencontrant Q suivant le complément d'un arc maximal. On peut calculer le cardinal de Q comme suit.

$$|Q| = q + 1 + \lambda(q^2 + q + 1 - q - 1) + \mu(nq + n - q - 1)$$

$$\text{avec} \quad \lambda + \mu = q + 1.$$

Donc

$$|Q| = (q+1)(nq + n - q) + \lambda(q^2 + q + 1 - nq - n). \tag{4}$$

De (3) et (4), on tire

$$\lambda = \frac{q^2 + q - nq}{(q^2 + q - nq) - (n-1)}$$

d'où, il vient

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{n-1}{q^2 + q - nq} = 1 - \frac{1}{q}\,\frac{n-1}{q - n + 1}.$$

Or $q = p^h$, $n - 1 = p^l(p^{h-l} - 1)$ et $q - n + 1 = p^l$ avec $0 < l < h$. Donc

$$\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{p^{h-l} - 1}{p^h} = \frac{p^h - p^{h-l} + 1}{p^h}.$$

Par conséquent, $p^h = \lambda[p^{h-l}(p^l - 1) + 1]$, ce qui est impossible car $p^{h-l}(p^l - 1) + 1$ n'est pas divisible par p.

LEMME 3. *Soit Q un ensemble de classe $(0, 1, n, q+1)$ dans $P = PG(d, q)$, avec $d \geqslant 3$ et $3 \leqslant n \leqslant q - 1$, rencontré par un plan suivant le complément K d'un arc maximal et soit A une vraie tangente à Q. Si $q > 4$, alors un plan par A ne peut rencontrer Q suivant un arc de ce plan.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un plan α par A coupant Q suivant un arc K' engendrant α. Désignons par a le point de tangence de A et soit B une droite sécante à K' ne passant pas par a. Les n droites $\langle a, b\rangle$, où $b \in B \cap K'$, sont des sécantes. Puisque chacune d'elles rencontre K' en n points, on a donc $n(n-1) + 1 \leqslant |K'|$. Mais l'arc K' admet une tangente en a. Donc, d'après un résultat de Hubaut [3], $|K'| \leqslant q\sqrt{q} + 1$. On en déduit

$$n(n-1) \leqslant q\sqrt{q} \tag{5}$$

d'où en tenant compte de (2), on tire $(p^h - p^l + 1)p^l(p^{h-l} - 1) \leqslant p^{h/2+h}$ c'est-à-dire $p^{2h-l} - 2p^h + p^l + p^{h-l} - 1 \leqslant p^{h/2+h-l}$. En négligeant le terme positif $p^l + p^{h-l} - 1$, on obtient $p^{h-l} < p^{h/2-l} + 2$. Posons $m = h - l$. On a $m \geqslant 1$. Comme $h/2 - l \leqslant h - l - 1 = m - 1$, on obtient $p^m < p^{m-1} + 2$ avec $m \geqslant 1$. D'où $p^{m-1}(p-1) < 2$. Ceci ne peut être réalisé que si $p = 2$, $m = 1$, c'est-à-dire si $q = 2^h$ et $n = 2^{h-1} + 1$. Mais, pour ces valeurs, la condition (5) s'écrit $2^{h-1}(2^{h-1} + 1) \leqslant 2^{h/2+h}$, c'est-à-dire $2^{h/2-2} + 1/(h/2+1) \leqslant 1$; ceci ne peut être réalisé que pour $h < 4$, c'est-à-dire si $q = 4$, $n = 3$ ou si $q = 8$, $n = 5$. Le cas $q = 4$ est exclu par les hypothèses. Supposons donc $q = 8$ et $n = 5$. Alors la condition (5) donne $21 \leqslant |K'| \leqslant \sqrt{8} + 1$, c'est-à-dire $21 \leqslant |K'| \leqslant 23$. Or, comme K' est un $\{k, 5\}$-arc, $|K'| = 1 + \lambda 4$. Donc le cardinal k de K' vaut nécessairement 21. Calculons de deux manières différentes le nombre de paires $\{b, A\}$, où b est un point n'appartenant pas à K' et A une vraie tangente à K' en a, dans le plan $\langle K'\rangle$.

(a) Le nombre de sécantes à K' par un point a de K' est 5; par conséquent, le nombre de tangentes à K' en a vaut 4. Le nombre total de tangentes à K' est donc $21 \cdot 4 = 84$. Dès lors, le nombre de paires $\{b, A\}$ ci-dessus vaut $84 \cdot 8 = 672$.

(b) Le nombre de points n'appartenant pas à K' est $73 - 21 = 52$. Mais par un point b n'appartenant pas à K', il passe μ tangentes à K' et $|K'| = \mu + 5\nu$; donc, puisque $|K'| = 21$ et $\mu \leqslant 9$, le nombre de tangentes à K' par b

vaut 1 ou 6. Par conséquent, le nombre de paire $\{b, A\}$ ci-dessus vaut au plus $52 \cdot 6 = 312$. On a ainsi obtenu une contradiction: il ne peut exister de $\{21, 5\}$-arc K', ce qui achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME 1. *Soit Q un ensemble de classe* $(0, 1, n, q+1)$ *dans* $P = PG(d, q)$, *avec* $d \geqslant 3$ *et* $3 \leqslant n \leqslant q-1$, *rencontré par un plan suivant le complément K d'un arc maximal. Si $q > 4$ et si Q ne contient pas d'ensemble plan de type* (iii), *alors Q est dégénéré et Q est la réunion des droites joignant les points de K aux points d'une variété linéaire de dimension $d-3$ gauche au plan de K.*

Démonstration. (1) Prouvons le théorème pour $d = 3$. Soit A une vraie tangente à Q en un point a de Q. (L'existence de A découle du Lemme 2.) Montrons que a est un point double de Q. Soit $B \neq A$ une droite par a. Considérons le plan $\langle A, B\rangle$. Si $\langle A, B\rangle \cap Q$ contient une droite de Q, alors, par le lemme 1, l'intersection $\langle A, B\rangle \cap Q$ est un sensembe (ii) ou (iii), à moins qu'elle ne soit réduite à une droite. Comme les ensembles de type (iii) sont exclus, $\langle A, B\rangle \cap Q$ est nécessairement une droite ou un faisceau de n droites et donc B est tangente à Q. Si $\langle A, B\rangle \cap Q$ ne contient pas de droites de Q, alors, par le Lemme 2, l'ensemble $\langle A, B\rangle \cap Q$ ne peut engendrer $\langle A, B\rangle$. Si $\langle A, B\rangle \cap Q$ se réduit au point a, alors B est évidemment tangente à Q. Supposons donc que $\langle A, B\rangle \cap Q$ soit un ensemble de n points alignés. Comme la section K ne possède ni droite extétieure, ni vraie tangente, $\langle A, B\rangle$ rencontre le plan de K suivant une sécante à Q qui n'est autre que $\langle A, B\rangle \cap Q$. Dès lors, a appartient à K. Mais alors, par ce qui précède, toute droite par a non située dans le plan de K est une tangente. L'ensemble Q est donc la réunion de K et d'un faisceau de droites A_i par a. Un plan $\langle A_i, C\rangle$, où C est une sécante à K par a, rencontre alors Q suivant la réunion de $C \cap Q$ et de droites par a. Or $\langle A_i, C\rangle \cap Q$ est de classe $(0, 1, n, q+1)$. Nous avons donc une contradiction avec le Lemme 1.

(2) Démontrons le théorème pour $d > 3$. Montrons que Q est dégénéré. Soit S une variété linéaire de $P_d(q)$ engendrée par K et un point de $Q - K$. Par le Lemme 2, $S \cap Q$ admet dans S une vraie tangente A en un point a. Montrons que a est point double de Q. Supposons qu'il existe par a, une droite B de P sévante à Q. Par (1), cette droite ne peut être contenue dans la variété linéaire S. Considérons donc la variété linéaire S' enegendrée par A, B et une sécante à K passant par le point $A \cap K$. Si l'ensemble $S' \cap Q$ comprend une section complément d'un arc maximal, alors, par (1), B ne peut être sécante. Il faut donc que $S' \cap Q$ ne contienne pas de section complément d'un arc maximal. Or, nous supposons que Q ne contient pas d'ensemble plan de type (iii). Par conséquent (voir [6, Théorème 3]), $S' \cap Q$ est une quadrique hermitienne. Donc $n = \sqrt{q} + 1$, ce qui contredit la valeur (2) de n, dès que $q \neq 4$. Il reste à prouver que l'ensemble des points doubles

de Q constitue une variété linéaire de dimension $d-3$ complémentaire au plan de K. Ceci découle de [6, Sect. 3] et du fait que, pour toute variété linéaire S de dimension 3 par K, l'ensemble $S \cap Q$ comprend un point double de Q.

4. Le cas $n \neq 2^{h-1} + 1$

Si $n \neq 2^{h-1} + 1$, alors le Théorème 1 permet de classer tous les ensembles Q contenant une section de type (iv). En effet, les relations (1) et (2) ne sont satisfaites simultanément, pour un n donné, que si $n = 2^{h-1} + 1$. Dès lors, si $n \neq 2^{h-1} + 1$, il ne peut exister à la fois des ensembles de type (iii) et (iv) et donc, si Q contient un ensemble de type (iv), il n'en contient pas de type (iii). Le Théorème 1 devient donc

Théorème 2. *Soit Q un ensemble de classe* $(0, 1, n, q + 1)$ *dans $P = PG(d, q)$ avec $d \geqslant 3$ et $3 \leqslant n \leqslant q - 1$, rencontré par un plan suivant le complément K d'un arc maximal. Si $n \neq 2^{h-1} + 1$, alors Q est dégénéré et Q est la réunion des droites joignant les points de K aux points d'une variété linéaire de dimension $d - 3$ gauche au plan de K.*

Lorsque Q est de classe $(1, n, q + 1)$, ce résultat est obtenu par M. Tallini–Scafati [7]. Elle omet toutefois d'y mentionner la restriction $n \neq 2^{h-1}$, qu'elle utilise implicitement dans la démonstration.

5. Le cas $n = 2^{h-1} + 1$

Si $n = 2^{h-1} + 1$, c'est-à-dire si $n = q/2 + 1$, il peut exister des ensembles Q contenant à la fois des ensembles de type (iii) et (iv). De tels ensembles Q sont construits par Hirschfeld et Thas. La famille d'exemples qu'ils décrivent [1] sont en fait de classe $(1, n, q + 1)$ et ils ont pu montrer [2] que ce sont là les seuls ensembles de classe $(1, n, q + 1)$, avec $n = q/2 + 1$. La classification plus générale des ensembles de classe $(0, 1, n, q + 1)$, avec $n = q/2 + 1$, demeure un problème ouvert.

References

1. J. W. P. Hirschfeld et J. A. Thas, Sets of type $(1, n, q + 1)$ in $PG(d, q)$, *Proc. London Math. Soc.* **41** (1980), 254–278.
2. J. W. P. Hirschfeld et J. A. Thas, The characterizations of projections of quadrics over finite fields of even order, *J. London Math. Soc.* **22** (1980), 226–238.

3. X. Hubaut, Limitation du nombre de points d'un $\{k, n\}$-arc régulier d'un plan projectif fini, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend.* **48** (1970), 490–493.
4. C. Lefevre–Percsy, An extension of a theorem of G. Tallini, *Journal Combinatorial Theory Ser. A* **29** (1980), 287–305.
5. C. Lefevre–Percsy, Ensembles de classe $(0, 1, q, q+1)$ de $PG(d, q)$, *J. Geom.* **15** (1981), 93–98.
6. C. Lefevre–Percsy, Quadriques hermitiennes et ensembles de classe $(0, 1, n, q+1)$ de $PG(d, q)$, *Geom. Dedicata*, a paraître.
7. M. Tallini-Scafatti, Caratterizzazione grafica delle forme hermitiane di $S_{r,q}$, *Rend. Mat.* **26** (1967), 273–303.